

專 題 演 講

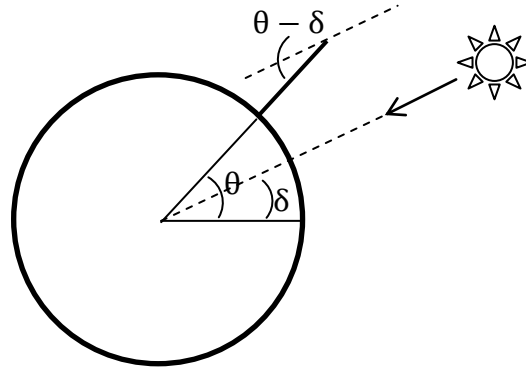
演 講 者：張海潮教授(台灣大學數學系)

演講題目：祖沖之測冬至

演講摘要：本演講將解釋祖沖之如何利用小學算術準確的測量冬至的時間點

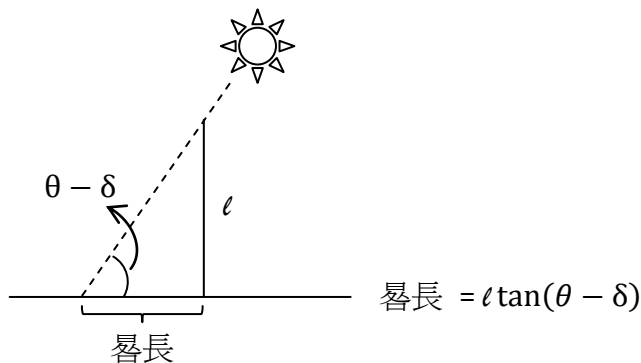
祖沖之測算冬至時刻 張海潮

由於太陽距離地球很遠，射到地球的光線彼此平行。在這些平行的光線中，有一條通過地心，如圖，此一通過地心的光線與地表交點的緯度，稱為此刻太陽直射地球的緯度，記為 δ ：



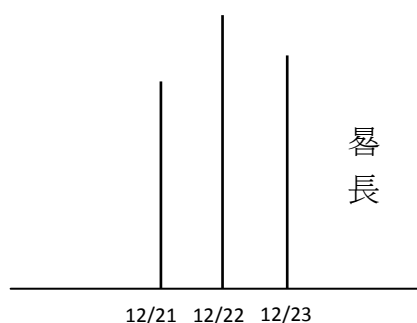
δ 在南緯 23.5° 到北緯 23.5° 之間變化，週而復始。根據 δ 的變化，一年中四個最重要的節氣分別是春分($\delta = 0^\circ$ ，約在 3 月 21 日)，夏至($\delta = 23.5^\circ$ ，約在 6 月 21 日)，秋分($\delta = 0^\circ$ ，約在 9 月 23 日)和冬至($\delta = -23.5^\circ$ ，約在 12 月 22 日)。

假設北半球某地位在北緯 θ 度，東經 α 度(例如台北位在 $\theta = 25^\circ$ ， $\alpha = 121^\circ$)。當太陽通過東經 α 度的瞬間，我們說太陽正通過該地的天頂，而將此一瞬間定為該地的正午時刻。古代中國便以測量晷長，即正午時地面所立竿子的影長來了解季節的變化。如圖，竿子的長度是 l ，則在正午時的竿影等於：



如果所在地的北緯度數 θ 大於 23.5° ，則夏至時晷長最短： $l \tan(\theta - 23.5^\circ)$ ，冬至時晷長最長： $l \tan(\theta + 23.5^\circ)$ 。回顧古代，中國是以冬至到冬至定為一年，稱為歲實，西方則以春分到春分定為一年，稱為回歸年。這兩個概念是等價的，但是對中國人來講，觀察晷長的最大值可能是一件比較方便的事，問題是：晷長的最大值 $l \tan(\theta + 23.5^\circ)$ 可能並不發生在該地的正午，亦即太陽直射南緯 23.5° 的瞬間可能並非該地的正午，比方說是該地的傍晚 6 點。如果該地是台北，台北的傍晚 6 點反而是埃及金字

塔所在地的正午，因為金字塔位於東經 31° ，和台北(東經 121°)有 6 小時的時差。因此如果要了解回歸年的長度，首先必須在每一天的正午紀錄竿影，並且理解從春天以後晷長是先遞增，過了冬至以後再遞減。如下表的紀錄：



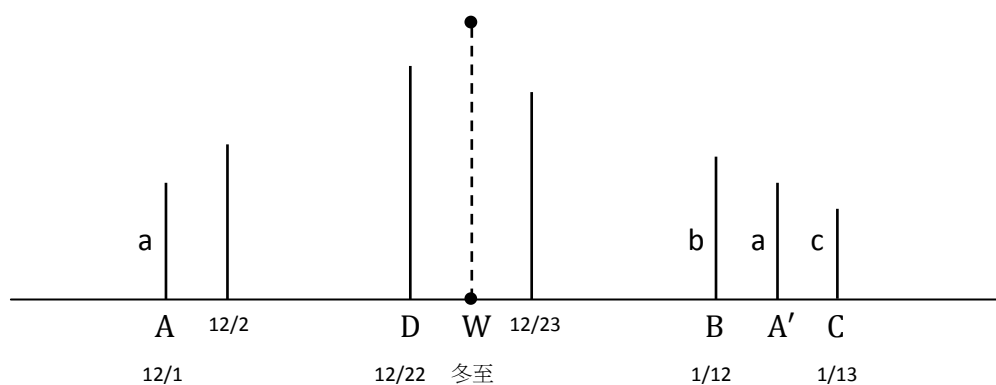
大概到了冬至來臨的 12 月 22 日前後，晷長會到達最長然後再變短，這就是古書《周髀》所說：於是三百六十五日南極影長，明日反短。

當然，冬至不一定剛好在 12 月 22 日的正午，但是如上表所示，一定在 12 月 22 日正午之前或正午之後的 24 小時中。

我們注意到，與冬至等時距的前後兩個時間點，由於地球的球形對稱，晷長必須相等。所以如果 12 月 23 日正午的晷長比 12 月 21 日的長，則冬至一定發生在 12 月 22 日正午到 12 月 23 日正午之間，假設如此，我們要問如何知道真正冬至的來臨比 12 月 22 日正午要晚多少時間呢？

下面我們參考《中國天文大發現》(作者陳久金、張明昌，山東出版社，2008 年)一書，說明祖沖之(公元 429—500 年)測算冬至時刻的辦法。

前提是假設冬至在 12 月 22 日和 12 月 23 日兩個正午之間，亦即正午的晷長一直遞增到 12 月 22 日，12 月 23 日之後開始遞減。我們取一個參考日，例如 12 月 1 日，開始看每日的晷影長：



12 月 1 日晷長 a ，距 D (12/22) 21 天，D 之後 21 天是 B (1 月 12 日)， A' 是 1 月 12 日到 1 月 13 日正午之間的時刻，晷長同樣是 a ，並且由於對冬至點 W 對稱，因此有 $AW = WA'$ ，但是 $AD = DB = 21$ 天，

所以 $AB = 2AD$ 並且 $AA' = 2AW$ ，因此 $DW = AW - AD = \frac{1}{2}(AA' - AB) = \frac{1}{2}BA'$ 。

亦即冬至時刻距 12/22 正午(DW)是 BA' 的一半。

B (1 月 12 日)的晷影是 b ，C (1 月 13 日)的晷影是 c ， A' 介於其間，我們不妨假設在 B、C 一日之間晷影是線性的遞減，是以

$$BA' = \frac{b-a}{b-c} \times 24 \text{ 小時，而 } DW = \frac{b-a}{b-c} \times 12 \text{ 小時}$$

a 、 b 、 c 分別為 12 月 1 日、1 月 12 日、1 月 13 日的晷長，都是實測的數據。

根據《中國天文大發現》一書 p.90，祖沖之終於能夠得到冬至到冬至的時距是 365.2428 日，是當時世界上最精密的回歸年值。